Correction du DST n°1

Exercice 1

1. - **Initialisation :** Pour $n = 1$ on a $\sin(a) = \sin(2a/2) = 2\sin(a/2)\cos(a/2)$ d'où $\cos(a/2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(a)}{\sin(a/2)}$. L'égalité est vraie pour $n = 1$.
   - **Hérédité :** Supposons que l'égalité soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \times \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \\
&= \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \times \frac{1}{2^n}\frac{\sin a}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin a}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin a}{\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}$$

   la propriété est donc vraie pour l'entier $n + 1$.
   - **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}}$$

2. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{2^n} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ d'après le cours, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} = 1$.

   On peut écrire :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin(a)}{a} \times \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

   donc par inverse et produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin(a)}{a}}$.

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
2\cos(2x) + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\cos(x) + 2 - \sqrt{6} = 0 &\iff 2(2\cos^2(x) - 1) + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\cos(x) + 2 - \sqrt{6} = 0 \\
&\iff 4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\cos(x) - \sqrt{6} = 0
\end{aligned}$$

2. $(2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 = 4 \times 2 + 4 \times 3 + 8\sqrt{6} = 20 + 8\sqrt{6}$. Or $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ est un réel positif donc $\sqrt{20 + 8\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
3. On pose $X = \cos(x)$. L'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})X - \sqrt{6}$ a deux solutions :

$$X_1 = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad X_2 = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$x \text{ est solution de } (E) \iff \begin{cases} 4X^2 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})X - \sqrt{6} = 0 \\ X = \cos(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ X = \cos x \end{cases}$$

$$\iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Ces deux dernières équations ont pour ensemble de solutions respectives :

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad S_2 = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

donc l'ensemble des solutions de E est $S = S_1 \cup S_2$.

Problème

Partie I

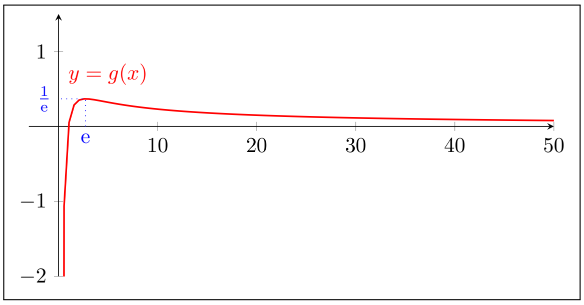
1. (a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

donc pour tout réel x strictement positif, $g'(x)$ est du même signe que $1 - \ln(x)$: positif si $x \leq \mathrm{e}$ et négatif sinon.
En outre on a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ par quotient et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée. On en déduit le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

La courbe représentative de g admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$:



(b) On suppose $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. D'après le tableau de variation de g :

- g est continue sur $]0; \mathrm{e}[$ (car dérivable sur cet intervalle)
- g est strictement croissante sur $]0; \mathrm{e}[$
- $a \in] \lim\limits_{x \to 0} g(x) ; g(\mathrm{e})[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $u(a) \in]0; \mathrm{e}[$ tel que $g(u(a)) = a$.

De même :

- g est continue sur $]\,\mathrm{e}; +\infty[$ (car dérivable sur cet intervalle)
- g est strictement décroissante sur $]\,\mathrm{e}; +\infty[$
- $a \in]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); g(\mathrm{e})[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $v(a) \in]\,\mathrm{e}; +\infty[$ tel que $g(v(a)) = a$.

(E_a) possède donc exactement deux solutions, une sur $]0; \mathrm{e}[$ et une sur $]\,\mathrm{e}; +\infty[$.

De plus, $g(a) = 0 < a$ donc on a bien $1 < u(a) < \mathrm{e} < v(a)$.

(c) D'après la courbe représentative de g et son tableau de variations :

- Si $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$, (E_a) n'a aucune solution.
- Si $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, (E_a) admet e comme unique solution.
- Si $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$, (E_a) admet exactement deux solutions.
- Si $a \leq 0$, (E_a) admet exactement une solution comprise entre 0 et 1.

2. (a) h_a est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout $x \in]0; +\infty($, on a :

$$h_a'(x) = \frac{2}{x} - a = \frac{2 - ax}{x}$$

donc $h_a'(x)$ est du même signe que $2 - ax$.

Enfin, par somme $\lim\limits_{x\to 0} h_a(x) = -\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty$ d'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{2}{a}$		$+\infty$
$h_a'(x)$		$+$	0	$-$	
h_a	$-\infty$	$\nearrow$	$h_a(2/a)$	$\searrow$	$-\infty$

(b) On a : $h_a(2/a) = 2\ln(2/a) + \ln a - 2 = 2\ln(2) - \ln a - 2$

Si $0 < a < \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, alors $0 < a\,\mathrm{e}^2 < 4$ donc par stricte croissance du logarithme on a $\ln(a) + 2\ln(\mathrm{e}) < \ln(4)$ d'où $\ln(a) + 2 < 2\ln(2)$. On en déduit que dans ce cas $h_a(2/a) > 0$.

- h_a est continue sur $]0; 2/a[$ et sur $]2/a; +\infty[$ (car dérivable)
- h_a est strictement monotone sur ces deux intervalles.
- $0 \in]\lim\limits_{x\to 0} h_a(x); h_a(2/a)[$ et $0 \in]\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x); h_a(2/a)[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à ces deux intervalles il existe exactement deux valeurs de x dans $]0; +\infty[$ pour lesquelles $h_a(x) = 0$, l'une entre 0 et $\dfrac{2}{a}$ et l'autre entre $\dfrac{2}{a}$ et $+\infty$.

(c) Si $0 < a < \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$ on a déjà montré que (F_a) avait exactement deux solutions.

Si $a = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, alors (F_a) admet pour unique solution $x = \dfrac{2}{a}$

Si $a > \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, alors pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h_a(x) < 0$ donc (F_a) n'admet aucune solution.

3. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et $x \in]0; +\infty[$.

Alors : $0 > -ax > -bx$

donc : $1 > \mathrm{e}^{-ax} > \mathrm{e}^{-bx} > 0$

donc : $-1 < -\mathrm{e}^{-ax} < -\mathrm{e}^{-bx} < 0$

donc : $\dfrac{1}{x} - 1 < \dfrac{1}{x} - \mathrm{e}^{-ax} < \dfrac{1}{x} - \mathrm{e}^{-bx} < \dfrac{1}{x}$

d'où : $\boxed{\dfrac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \dfrac{1}{x}}$

4. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-ax} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f_a(x) = +\infty}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -ax = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-ax} = 0$ et par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0}$.

5. (a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f_a(x) \geq 0 &\iff \frac{1}{x} \geq \mathrm{e}^{-ax} \\ &\iff -\ln(x) \geq -ax \\ &\iff \frac{\ln x}{x} \leq a && \text{car } -x < 0 \\ &\iff a - g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

   donc $f_a(x)$ et $g(x)$ ont le même signe pour tout réel $x > 0$.

   (b) On distingue trois cas :

   - Cas où $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $g(x) = a$ admet exactement deux solutions : $u(a)$ et $v(a)$.
     Comme $a - g(x) \geq 0 \iff g(x) \leq a$, on en déduit le tableau suivant d'après le tableau de variations de g :

x	0		$u(a)$		$v(a)$		$+\infty$
$a - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   - Cas où $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $g(x) = a$ admet exactement une solution, donc $a - g(x)$ est de signe constant et s'annule exactement une fois en $x = \mathrm{e}$. On en déduit le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$a - g(x)$		$+$	0	$+$	
$f_a(x)$		$+$	0	$+$	

   - Cas où $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $g(x) = a$ n'admet aucune solution et $a - g(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$ donc f_a est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

6. (a) Dérivabilité de f_a :

   - $x \mapsto -ax$ est dérivable sur $]0;+\infty$
   - $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
   - Par composition $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
   - Par somme f_a est dérivable sur $]0;+\infty[$.

   Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f_a'(x) = -\frac{1}{x^2} + a\,\mathrm{e}^{-ax}$$

   donc

$$\begin{aligned} f_a'(x) \geq 0 &\iff a\,\mathrm{e}^{-ax} \geq \frac{1}{x^2} \\ &\iff \ln(a) - ax \geq -\ln(x^2) && \text{car ln est strictement croissante} \\ &\iff 2\ln(x) + \ln(a) - ax \geq 0 \\ &\iff h_a(x) \geq 0 \end{aligned}$$

donc $f_a'(x)$ est du même signe que $h_a(x)$ quel que soit $x \in]0;+\infty[$.

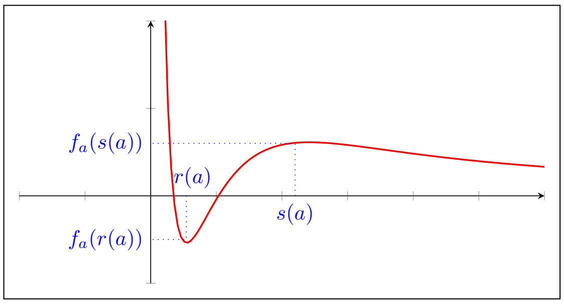
(b) Distinguons deux cas :

- Si $a \geq \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, alors $h_a(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ donc f_a est décroissante sur $]0;+\infty[$
- Si $0 < a < \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, alors $h_a(x)$ est négative hors de l'intervalle $]r(a);s(a)[$ et positive dans cet intervalle. On a donc :

x	0		$r(a)$		$s(a)$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	$f_a(r(a))$	$\nearrow$	$f_a(s(a))$	$\searrow$	0

7. (a) Supposons que $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. $u(a)$ et $v(a)$ vérifient $f(u(a)) = f(v(a)) = 0$ d'après la question 5.b).
D'après le tableau de variation de f_a et sa limite en $+\infty$, $f_a(x)$ est strictement positive sur $]s(a);+\infty[$. Elle est strictement monotone sur $]0;r(a)[$ et sur $]r(a);s(a)[$ donc elle s'annule au plus une fois sur chacun de ces intervalles.
On en déduit que $u(a) \in]0;r(a)[$ et $v(a) \in]r(a);s(a)[$, donc que $\boxed{u(a) < r(a) < v(a) < s(a)}$.
De plus, on a alors $f_a(r(a)) < f_a(u(a)) = 0$ donc $f_a(r(a))$ est le minimum de f_a sur $]0;+\infty[$.

(b) Allure du graphe :



8. (a) $r(a)$ est solution de $h_a(x) = 0$ donc $2\ln(r(a)) + \ln(a) - ar(a) = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}\ln(r(a)) &= \frac{ar(a)}{2} - \frac{1}{2}\ln(a)\\ &= \frac{ar(a)}{2} - \ln(\sqrt{a})\end{aligned}$$

d'où en composant par exp :

$$\boxed{r(a) = \frac{\mathrm{e}^{ar(a)/2}}{\sqrt{a}}}$$

(b) En multipliant par a dans l'égalité précédente on obtient :

$$ar(a) = \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{ar(a)/2}$$

D'après la question 2.b), $0 < r(a) < \dfrac{2}{a}$ donc $0 < ar(a)/2 < 1$. Ainsi, $1 < \mathrm{e}^{ar(a)/2} < \mathrm{e}$, et finalement :

$$\sqrt{a} < \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{ar(a)/2} < \mathrm{e}\sqrt{a}$$

Puisque $\lim\limits_{a\to 0} \sqrt{a} = \lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}\sqrt{a}$ on en déduit d'après le théorème des gendarmes que :

$$\boxed{\lim_{a\to 0} ar(a) = \lim_{a\to 0} \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{ar(a)/2} = 0}$$

On écrit ensuite $\sqrt{a}r(a) = \mathrm{e}^{ar(a)/2}$ et $\lim_{a\to 0} \mathrm{e}^{ar(a)/2} = \mathrm{e}^0 = 1$ par continuité de la fonction exponentielle.

Ainsi, $\boxed{\lim_{a\to 0} \sqrt{a}r(a) = 1}$.

(c) On a, pour tout $a \in]0; \frac{1}{\mathrm{e}}[$,

$$\begin{aligned} m(a) &= f_a(r(a)) \\ &= \frac{1}{r(a)} - \mathrm{e}^{-ar(a)} \end{aligned}$$

or $\lim_{a\to 0} \sqrt{a}r(a) = 1$ donc $\lim_{a\to 0} r(a) = +\infty$ et $\lim_{a\to 0} ar(a) = 0$ donc $\lim_{a\to 0} \mathrm{e}^{-ar(a)} = 1$, d'où par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{a\to 0} m(a) = -1}$$

Partie II

1. (a) On doit d'abord tester chacun des n groupes, donc effectuer n tests.
   Pour chacun des X groupes positifs on effectue ℓ tests supplémentaires.
   Ainsi, $\boxed{T = n + \ell X}$.

   (b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, H_i est négatif si et seulement si tous les prélèvement du groupe i sont négatif.
   La probabilité que ℓ prélèvements indépendants soient tous négatifs est $(1-p)^\ell$ donc :

   $$\boxed{\mathbb{P}(\text{« le test de } H_i \text{ est négatif »}) = (1-p)^\ell}$$

   (c) X compte le nombre de groupes testés positivement, donc X compte le nombre de succès dans la répétition identique et indépendante d'une même expérience de succès « le groupe est positif », dont la probabilité de succès est $q = 1 - (1-p)^\ell$ d'après la question précédente.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } \big(n, 1-(1-p)^\ell\big).}$$

   D'après le rappel, $\boxed{E(X) = n(1-(1-p)^\ell)}$

   (d) Par linéarité de l'espérance,

   $$\begin{aligned} E(T) &= n + \ell E(X) \\ &= n + n\ell(1-(1-p)^\ell) \\ &= \frac{N}{\ell} + N(1 - \mathrm{e}^{\ell \ln(1-p)}) \\ &= \frac{N}{\ell} + N(1 - \mathrm{e}^{-a\ell}) \\ &= N\left(1 + \frac{1}{\ell} - \mathrm{e}^{-a\ell}\right) \\ &\boxed{= N(1 + f_a(\ell))} \end{aligned}$$

2. Calculons :

$$\begin{aligned} f_a(3) &= \frac{1}{3} - \mathrm{e}^{-3a} \\ &= \frac{1}{3} - \mathrm{e}^{3\ln(1-p)} \\ &= \frac{1}{3} - (1-p)^3 \end{aligned}$$

Or $1-p > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ donc $(1-p)^3 > \frac{1}{3}$ donc $f_a(3) < 0$.

Pour $\ell = 3$, on aura donc $f_a(\ell) < 0$ donc $E(T) < N$ d'après la question 1.d). Le nombre moyen de test effectué sera plus petit avec la méthode de poolage qu'avec la première méthode.

3. On a $1-p > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ donc $\ln(1-p) > -\ln(3^{1/3}) = -\frac{\ln(3)}{3}$ et donc $\boxed{a < \frac{\ln(3)}{3}}$.

4. (a) La suite $(f_a(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement négative en $n=3$, et strictement positive lorsque $n > v(a)$. Ainsi le minimum de cette suite est atteint pour au moins une valeur de n comprise entre 1 et $\lfloor v(a) \rfloor$.
Supposons que ℓ est un entier vérifiant la propriété (MIN). D'après les variations de f, $(f_a(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour $1 \leq n \leq \lfloor r(a) \rfloor$ et croissante pour $\lfloor r(a) \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor v(a) \rfloor$.
On en déduit que $\ell \geq \lfloor r(a) \rfloor$ et $\ell \leq \lfloor r(a) \rfloor + 1$, d'où :

$$\boxed{\ell = \lfloor r(a) \rfloor \quad \text{ou} \quad \ell = \lfloor r(a) \rfloor + 1}$$

(b) Puisqu'on a déjà $f_a(3) < 0$, on a nécessairement $f_a(\ell_0) \leq f_a(3) < 0$.
Comme $f_a(1) = 1 - \mathrm{e}^{-a} > 0$, on a $\boxed{\ell_0 \geq 2}$.

(c) Suivant l'indication de l'énoncé on pose $\varphi(a) = f_a(2) - f_a(3)$. φ est définie et dérivable sur $]0; \frac{\ln(3)}{3}[$ et :

$$\forall a \in]0; \frac{\ln(3)}{3}[, \quad \varphi(a) = \frac{1}{6} - \mathrm{e}^{-2a} + \mathrm{e}^{-3a}$$

$$\forall a \in]0; \frac{1}{\mathrm{e}}[, \quad \varphi'(a) = 2\,\mathrm{e}^{-2a} - 3\,\mathrm{e}^{-3a}$$

$\varphi'(a) \geq 0 \iff 2\,\mathrm{e}^{-2a} \geq 3\,\mathrm{e}^{-3a} \iff \mathrm{e}^a \geq \frac{3}{2} \iff \frac{1}{1-p} \geq \frac{3}{2}$.
Or $1-p > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ donc $\frac{1}{1-p} < \sqrt[3]{3}$. Comparons $\frac{3}{2}$ et $\sqrt[3]{3}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 3$$

donc

$$\frac{3}{2} > \sqrt[3]{3}$$

Ainsi on a $\varphi'(a) < 0$ pour tout $a \in]0; \frac{\ln(3)}{3}[$ donc φ est strictement décroissante sur cet intervalle. On a :

$$\varphi\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) = \frac{1}{6} + \mathrm{e}^{-\ln(3)} - \mathrm{e}^{-2/3\ln(3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2/3}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ tandis que $\left(\frac{1}{3^{2/3}}\right)^3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, d'où $\frac{1}{3^{2/3}} < \frac{1}{2}$. Ainsi, $\varphi\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) > 0$ donc φ est strictement positive sur $]0; \frac{\ln(3}{3}[$. On en conclut finalement que $\boxed{f_a(3) < f_a(2) \text{ d'où } \ell_0 \geq 3.}$